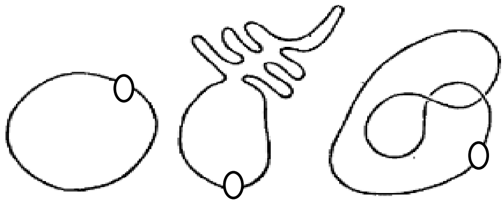
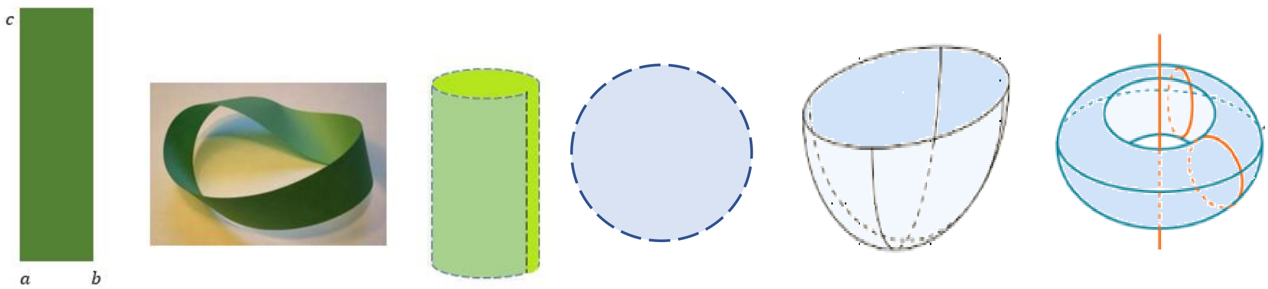
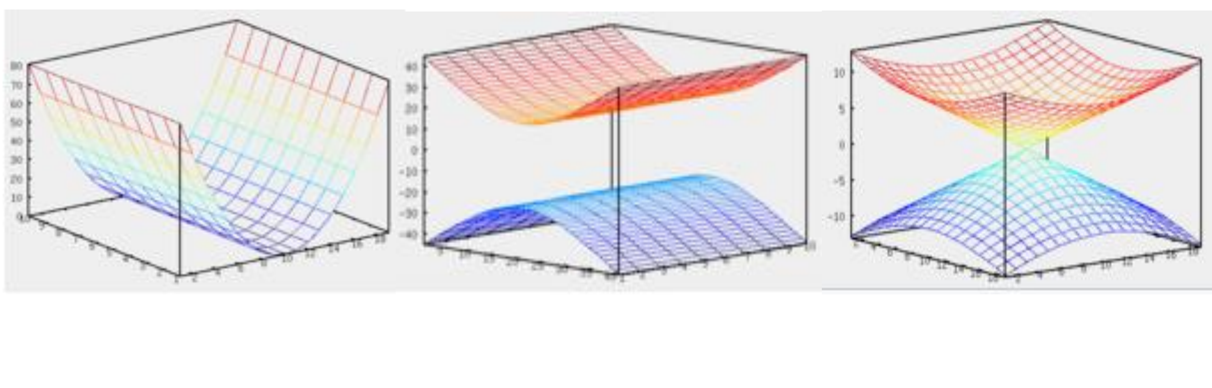
САБАҚ № 12

Алдыңғы сабақта біз бір өлшемді көпбейнені қарастырғанбыз. Оқырманға түсінікті болу үшін еске салайық: $(a;b)$ интервалы иілгіш, созылмалы (мәселен, резеңке) материалдан жасалған еді. Біз оны үзіліссіз деформациялау арқылы кей тұста созып, кей тұста сығып өлшемі мен формасын өзгерттік. Резеңке жіптен жасалған ойылған шеңберді созу арқылы ойылған эллипстің формасына келтірсек болады, қаласақ, бір нүктесіз дұрыс немесе дұрыс емес көпбұрыштардың немесе ойылған ғажайып қисықтардың (төмендегі суреттегідей) формасына келтірсек болады.



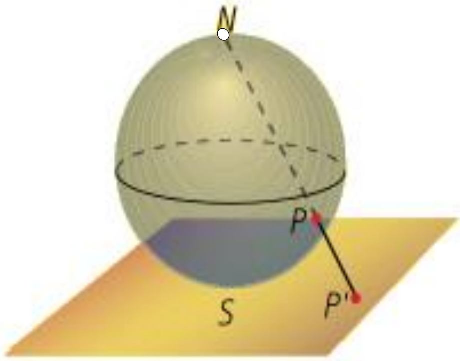
Енді жұқа резеңке материалдан жасалған G облысын қарастырайық. Оны да үзіліссіз деформациялау арқылы кей тұстарын созып, кей тұстарын сығып өлшемі мен формасын өзгертуге болады. Нәтижесінде *жазық фигура* немесе *бет* шығады. Төмендегі суретте тік төртбұрышты және дөңгелекті деформациялаудан шыққан беттер келтірілген:





Жаттығу 1. *Жазықтықтың бейнесі ойылған сфера болатындай карта құрастырыңыз.*

Шешуі. Айталық, $N(0;0;1)$ –сфераның бойындағы ойылған нүкте, S - жазықтық пен сфераның жанасу нүктесі болсын. Жазықтықтан кез келген $P'(u;v)$ нүктені қарастырайық. ***Мақсатымыз:*** жазықтықтағы әр нүктеге өзара бірмәнді бейнеленген сферадағы нүктені табу.



Ол үшін сферадағы ойылған N нүкте мен P' нүктелерін кесінді арқылы қосамыз. Бұл кесінді сфераны тек бір-ақ нүктеде қияды. Қиылысу нүктесін $P(x^1;x^2;x^3)$ деп белгілейік. N,P,P' нүктелері бір түзудің бойында жатыр. NPP' түзудің теңдеуін жазайық:

$$\frac{x^1}{u}=\frac{x^2}{v}=\frac{x^3-1}{-1}$$

Бұл теңдіктерден

$$u=\frac{x^1}{1-x^3},\quad v=\frac{x^2}{1-x^3}$$

аламыз. Бұл карта сферадағы әр нүктеге жазықтықтан бір нүктені сәйкес қояды. N-ге сәйкес келетін жазықтықта нүкте жоқ.

$$u^2+v^2=\frac{(x^1)^2+(x^2)^2}{(1-x^3)^2}$$

және

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

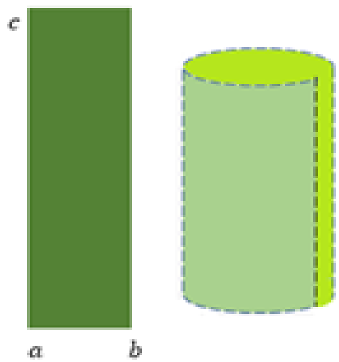
теңдіктерден:

$$\begin{cases} x^1(t)=\dfrac{u}{u^2+v^2+1}, \\ x^2(t)=\dfrac{v}{u^2+v^2+1} \\ x^3(t)=\dfrac{u^2+v^2}{u^2+v^2+1}, \end{cases} \qquad u,v\in\mathbb{R}$$

картаны аламыз. Бұл карта жазықтықтағы әр нүктеге сферадан бір нүктені сәйкес қояды.

Жаттығу 2. *Тік төртбұрышты деформациялау арқылы жасаушы бойымен қиылған цилиндр шығатындай картаны жазыңыз.*

Шешуі. Бейнелеу нәтижесінде бет алдық. Цилиндрдің Ox^3 айналу өске перпендикуляр жазықтықпен қимасы – ойылған шеңбер. Ойылған шеңбердің картасын жаза аламыз. Сондықтан цилиндрдің картасы төмендегідей түрде болады:



$$\begin{cases} x^1(u,v) = \frac{b-a}{2\pi}\ cosv, \\ x^2(u,v) = \frac{b-a}{2\pi}\ sinv, \\ \quad x^3(u,v) = u \end{cases} \qquad 0 < v < 2\pi,\ a < u < c$$

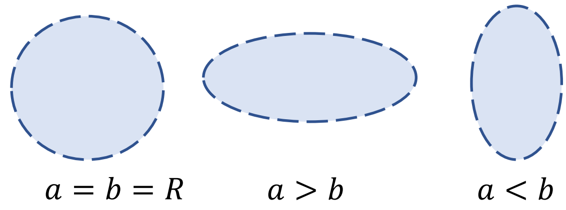
мұнда (x^1, x^2, x^3) - цилиндрдің нүктелері.

Жаттығу 3. *G: $u^2 + v^2 < R^2$ – ашық дөңгелекті ашық эллипске бейнелейтін картаны жазыңыз.*

Шешуі. Эллипсті алу үшін дөңгелекті өзара перпендикуляр екі бағыттың бірі бойынша созу немесе сығу керек.

Яғни,

$$\begin{cases} x^1(u,v) = \frac{a}{R}u, \\ x^2(u,v) = \frac{b}{R}v \end{cases} \qquad (u,v) \in$$

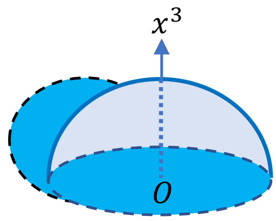


G

мұнда a, b - созу немесе сығу коэффициенттері, (x^1, x^2) - ашық эллипстің нүктелері.

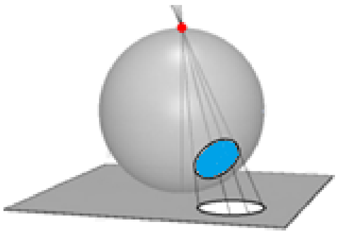
Жаттығу 4. *G: $u^2 + v^2 < R^2$- ашық дөңгелекті жартылай сфераға бейнелейтін картаны жазыңыз.*

Шешуі. 1-семинар сабақта ашық дөңгелектің картасын бірнеше түрде келтіргенбіз. Сол карталардың бірін пайдалансақ:



$$\begin{cases} x^1(u,v) = R\ sinu\ cosv, \\ x^2(u,v) = R\ cosu\ cosv, \\ \quad x^3(u,v) = R\ sinv \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 < u < 2\pi, \\ 0 < v < \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

жартылай сфераның картасын аламыз.



Мұнда шеңбер центрі арқылы біркелкі деформацияланды. Яғни, шеңбер мен жартылай сфераның центрлері бір нүктеде орналасқан.

Басқа жағдайларда сфераның қандай да бір бөлігін аламыз.

Тапсырмалар

1. $G: u^2 + v^2 < 4 -$ ашық дөңгелекті ашық $G: \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{4} < 1$ эллипске бейнелейтін картаны жазыңыз.
2. $G: u^2 + v^2 < 4 -$ ашық дөңгелекті ашық $G: \frac{(u-1)^2}{2} + \frac{v^2}{4} < 1$ эллипске бейнелейтін картаны жазыңыз.
3. $G: 1 < u < 4,\ 2 < v < 6$ тік төртбұрыштан ашық цилиндр шығатындай картаны жазыңыз.
4. $G: 0 < u^2 + v^2 < R^2$- ашық дөңгелекті тегіс конусқа бейнелейтін картаны жазыңыз.
5. S: центрі - $(0; 0; 1)$ нүктесі, радиусы 1-ге тең сфера және $N(0; 0; 2)$ нүктесі берілген. $S \setminus N$ сфераның картасын жазыңыз.
6. S: центрі - $(0; 0; 1)$ нүктесі, радиусы 1-ге тең сфера және $N(0; 0; 0)$ нүктесі берілген. $S \setminus N$ сфераның картасын жазыңыз.
7. $(1; 5)$ нүктенің $(x^1)^2 + (x^2)^2 = x^3(1 - x^3)$ сферадағы бейнесін табыңыз.
8. $(-2; -5)$ нүктенің $(x^1)^2 + (x^2)^2 = x^3(1 - x^3)$ сферадағы бейнесін табыңыз.
9. $\left(0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ нүктенің жазықтықтағы бейнесін табыңыз.
10. $\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$ нүктенің жазықтықтағы бейнесін табыңыз.